Κωνικές Τομές

- Έλλειψη: (Με εστίες στον x'x)

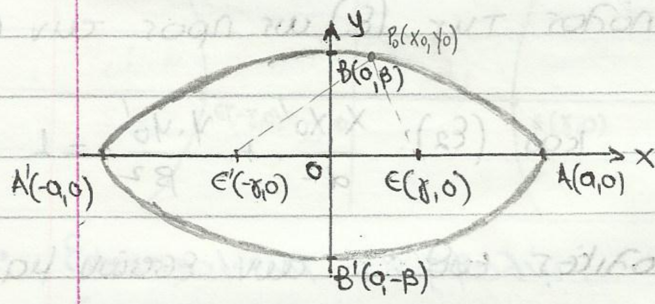
$$|\vec{PE}|+|\vec{PE'}|=2a>0 \Rightarrow \sqrt{(x-\gamma)^2+y^2}+\sqrt{(x+\gamma)^2+y^2}=2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\gamma^2}=1$$ με $\cancel{2}a>\cancel{2}\gamma \Rightarrow a>\gamma$
και $\beta^2=a^2-\gamma^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

Άρα, $\boxed{(c): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1}$

ΣΧΗΜΑ:



- Εφαπτομένη έλλειψης:

Έστω σημείο $P_0(x_0,y_0)$ πάνω στην έλλειψη, θα είναι μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ όμως θα επαληθεύει άρα

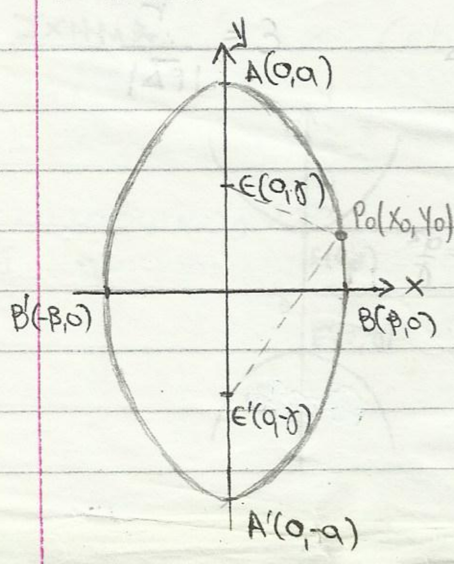
$$(\varepsilon): \frac{x_0\cdot x}{a^2}+\frac{y_0 y}{\beta^2}=1$$

- Έλλειψη: (Με εστίες στον y'y)

Είναι μορφής

$$(c): \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$ όπου $\beta^2=a^2-\gamma^2$

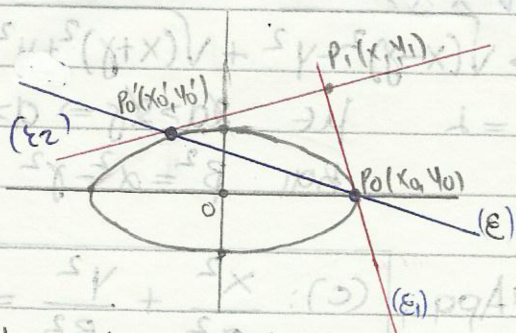
ΣΧΗΜΑ:



- Ορισμός Έλλειψης:

Για τα σημεία Ε και Ε' (εστίες) ονομάζουμε έλλειψη το γεωμετρικό τόπο G των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε' και Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του (Ε'Ε)

• Για σημείο εκτός έλλειψης άγονται 2 εφαπτόμενες



$$(\varepsilon): \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$$

Η (ε) ονομάζεται πολική ευθεία του P_1 ως προς την (c)
Το P_1 ονομάζεται πόλος της (ε) ως προς την (c).

$$(\varepsilon_1): \frac{x \cdot x_0}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_0}{\beta^2} = 1 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): \frac{x \cdot x_0'}{\alpha^2} + \frac{y \cdot y_0'}{\beta^2} = 1$$

• Για να βρούμε τις πολικές ευθείες των εστιών μας θα πρέπει να είναι:

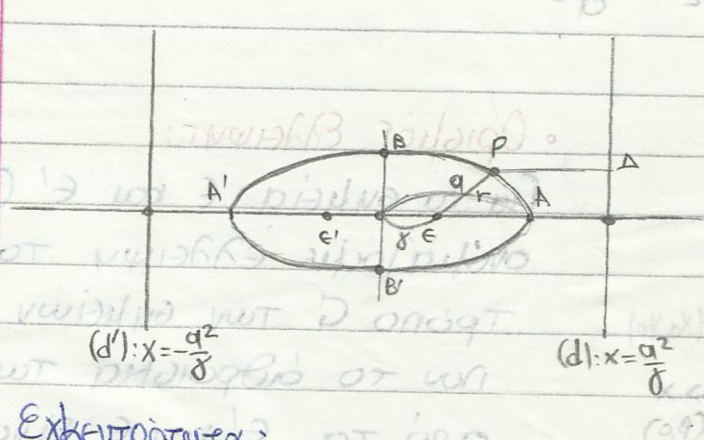
• $E(\gamma,0)$

$$x_0=\gamma,\ y_0=0 \Rightarrow \frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma x}{\alpha^2} + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\alpha^2}{\gamma}}$$

• $E'(-\gamma,0)$

$$x_0=-\gamma,\ y_0=0 \Rightarrow \frac{x_0 x}{\alpha^2} + \frac{y_0 y}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{-\gamma x}{\alpha^2} + 0 = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}}$$

Οι ευθείες που βρέθηκαν πάνω ονομάζονται διευθετούσες (d) και (d')



$$\varepsilon = \frac{r}{|\vec{P\Delta}|}$$

• Εκκεντρότητα:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$$

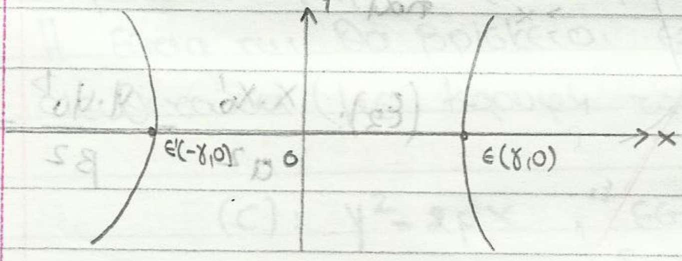
• Υπερβολή (Με εστίες στον x'x)

$||\vec{PE}| - |\vec{PE'}|| = 2\alpha$, $\gamma > \alpha$ και $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

Η εξίσωση έχει μορφή: $\boxed{(C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1}$

ΣΧΗΜΑ:



• Εφαπτόμενη Υπερβολής:

Έστω σημείο $P_0(x_0, y_0)$ πάνω στην υπερβολή καθώς επίσης το P_0 σημείο επαφής της (C) με μια ευθεία. Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο P_0 θα 'ναι μορφής

$$(\varepsilon): \frac{x \cdot x_0}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_0}{\beta^2} = 1$$

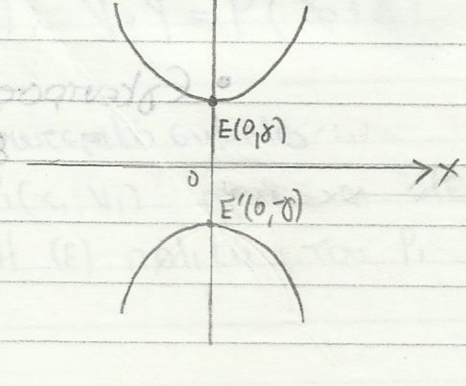
Προσοχή!!!
Η εφαπτόμενη μίας υπερβολής στο τυχαίο σημείο M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$ με E και E' εστίες της Υπερβολής.

• Υπερβολή (Με εστίες στον y'y)

Είναι μορφής

$$(C): \frac{x^2}{\beta^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

ΣΧΗΜΑ:

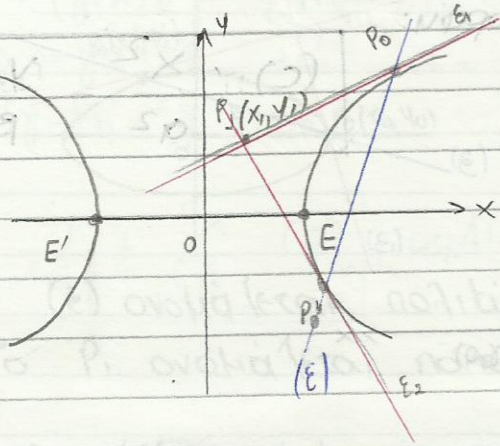


Ορισμός Υπερβολής:

Για τα σημεία E και E' (εστίες) Υπερβολή ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο C των σημείων του επιπέδου όπου η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων απ' τις E και E' είναι σταθερή και μικρότερη του (E'E)

• Για σημείο εκτός Υπερβολής άγονται 2 εφαπτόμενες

Έστω $P_1(x_1, y_1)$ το εξωτερικό σημείο της Υπερβολής
Η ευθεία (ε) που σχηματίζεται θα λέγεται πολική του P_1
και το P_1 πόλος της ε ως προς τη (c)



$$(\varepsilon_1): \frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{\beta^2} = 1$$

και

$$(\varepsilon_2): \frac{x \cdot x_0'}{a^2} - \frac{y \cdot y_0'}{\beta^2} = 1$$

• Ασύμπτωτες Υπερβολής

Πώς βρίσκουμε τις ασύμπτωτες μιας Υπερβολής;
Επιλύουμε την εξίσωση (c) ίση με το μηδέν
Απόδειξη:

$$(c): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \pm \frac{y}{\beta} \quad \forall a, \beta \neq 0$$

Άρα, $(\varepsilon_1): ay - \beta x = 0$ και $(\varepsilon_2): ay + \beta x = 0$

• Διευθετούσες

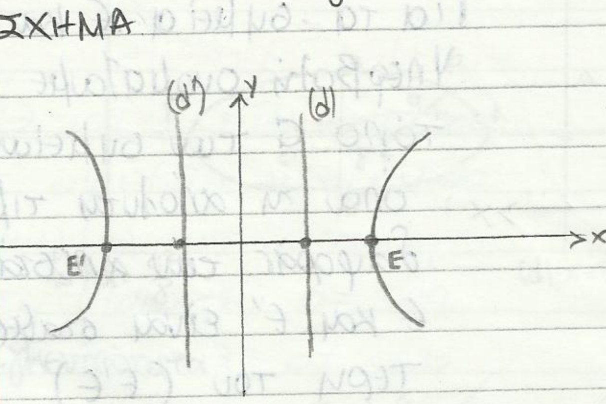
Όπως πριν αντικατάσταση στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$ τις εστίες

Άρα

$(d_1): x = \frac{a^2}{\gamma}$ και $(d_2): x = \frac{-a^2}{\gamma}$ και λέγονται πολικές των εστιών

ΣΧΗΜΑ



• Εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} > 1$$

• Παραβολή:

Ορισμός: Εστω μια ευθεία δ και ενα σημειο Ε εκτός της δ
Παραβολή ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημειων
του επιπεδου, με εστία Ε και διευθετούσα δ, τα
οποία ισαπέχουν από την Ε και τη δ

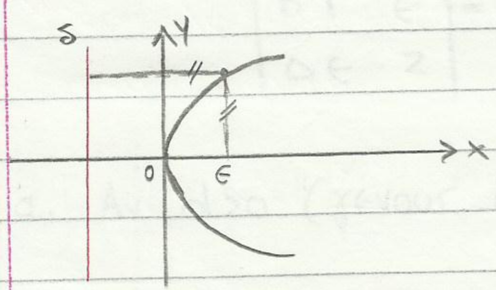
• Εξίσωση Παραβολής (ως προς τον $x'x$)
Η εστια της θα βρίσκεται στον $x'x$, ομοίως και η
διευθετούσα (με κορυφή το $O(0,0)$)

$(C): y^2=2px$, εστια $E(\frac{p}{2},0)$ και
διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2}$

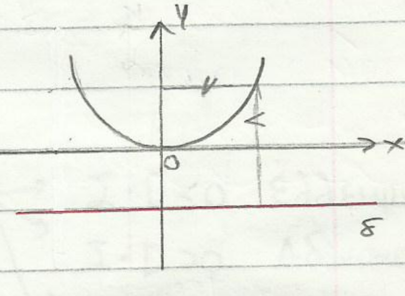
• Η εξίσωση Παραβολής (ως προς τον $y'y$)
Η εστία της θα βρίσκεται στον $y'y$, ομοίως και η
διευθετούσα (με Κορυφή το $O(0,0)$)

$(C): x^2=2py$, εστία $E(0,\frac{p}{2})$ και
διευθετούσα $\delta: y=-\frac{p}{2}$

ΣΧΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΚΑΘΕΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ:



και



• Εφαπτομένη παραβολής
$(\varepsilon): y_0 y = p(x_0+x)$ έχει μόνο ενα κοινό σημείο

• Εξωτερικό σημείο:
$P_1(x_1, y_1)$ αρα η (ε) $y_1 y = p(x_1+x)$
Η (ε) πολική του P_1 και το P_1 πολος της (ε) ως προς τη (c)

- Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτόμενη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t που είναι ομόρροπη της OE, με E εστία παραβολής

Ένα γενικό σχήμα: